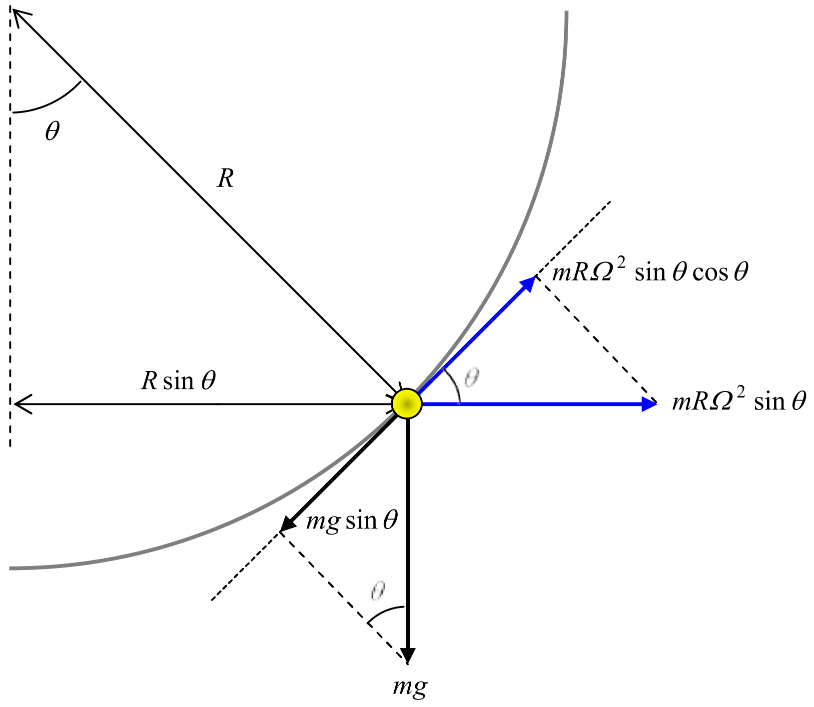
物理問題　I

あ

$mR\Omega^2 \sin\theta\cos\theta$

解説



い

$\dfrac{g}{R\Omega^2}$

解説

$0 = -mg\sin\theta_0 + mR\Omega^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0$ より，$m\sin\theta_0\left(R\Omega^2\cos\theta_0 - g\right) = 0$　$\therefore \cos\theta_0 = \dfrac{g}{R\Omega^2}$

う

$\sqrt{\dfrac{g}{R}}$

解説

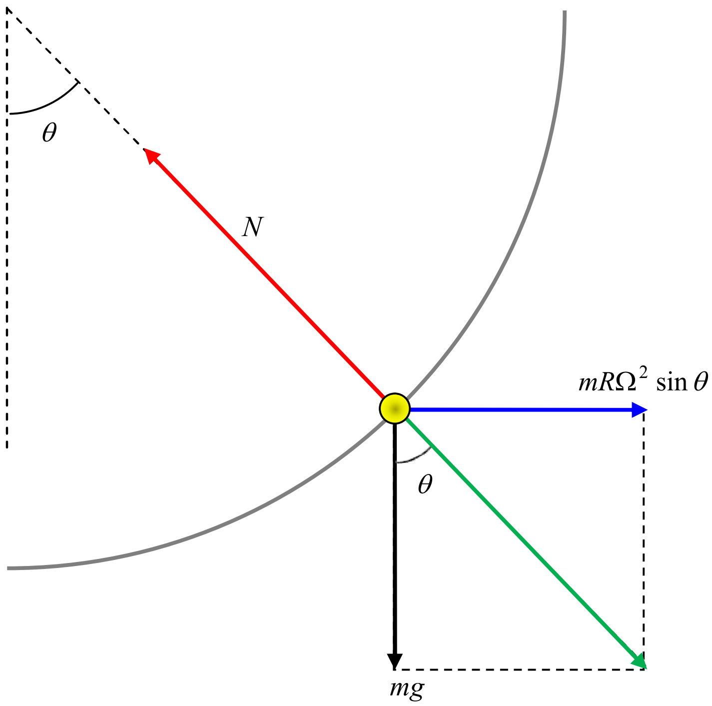
遠心力と重力の合力の向きから $0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$　また，$\sin\theta_0 \ne 0$ より，$\theta \ne 0$

よって，$0 < \cos\theta < 1$ すなわち $0 < \dfrac{g}{R\Omega^2} < 1$ より，$\dfrac{R\Omega^2}{g} > 1$　$\therefore \Omega > \Omega_c = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$

$\boxed{え}$

$mR\Omega^2$

解説

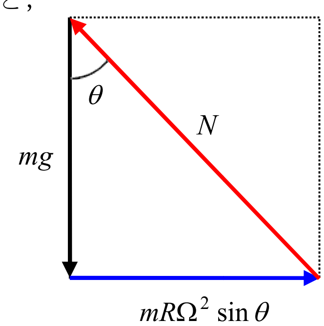


求める力を N とすると， N は重力と遠心力の合力（緑色矢印）とつり合うから，

$$N = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{mg}{\frac{g}{R\Omega^2}} = mR\Omega^2$$

または、3 力がつり合うから，ベクトルを継ぎ足すと，
右図のような閉じた図形ができる。
よって，

$$N = \frac{mg}{\cos\theta} = mR\Omega^2$$



お

$\sqrt{\dfrac{g}{R}-\Omega^2}$

解説

$$
\begin{aligned}
F &= -mg\sin\theta + mR\Omega^2\sin\theta\cos\theta \\
&= -mg\sin(\theta_0+\phi) + mR\Omega^2\sin(\theta_0+\phi)\cos(\theta_0+\phi) \\
&= -mg\sin\phi + mR\Omega^2\sin\phi\cos\phi \\
&\approx -mg\phi + mR\Omega^2\phi \\
&= -mg\cdot\frac{x}{R} + m\Omega^2 x \\
&= -m\left(\frac{g}{R}-\Omega^2\right)x
\end{aligned}
$$

より，$k = m\left(\dfrac{g}{R}-\Omega^2\right)$

よって，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{g}{R}-\Omega^2}$

か

$-mR\Omega^2\sin^2\theta_0$

解説

$$
\begin{aligned}
F &= -mg\sin\theta + mR\Omega^2\sin\theta\cos\theta \\
&= -m\sin\theta\left(g - R\Omega^2\cos\theta\right) \\
&= -m\sin(\theta_0+\phi)\left\{g - R\Omega^2\cos(\theta_0+\phi)\right\} \\
&= -m(\sin\theta_0\cos\phi + \cos\theta_0\sin\phi)\left\{g - R\Omega^2(\cos\theta_0\cos\phi - \sin\theta_0\sin\phi)\right\} \\
&\approx -m(\sin\theta_0 + \phi\cos\theta_0)\left\{g - R\Omega^2(\cos\theta_0 - \phi\sin\theta_0)\right\} \\
&= -m\left(\sin\theta_0 + \frac{g\phi}{R\Omega^2}\right)\left\{g - R\Omega^2\left(\frac{g}{R\Omega^2} - \phi\sin\theta_0\right)\right\} \\
&= -m\left(\sin\theta_0 + \frac{g\phi}{R\Omega^2}\right)R\Omega^2\phi\sin\theta_0 \\
&= -mR\Omega^2\phi\sin^2\theta_0 - mg\phi^2\sin\theta_0
\end{aligned}
$$

ϕ^2 の項は無視するから，$F = -mR\Omega^2\sin^2\theta_0\times\phi$

$\boxed{\text{き}}$

$\Omega\sqrt{1-\dfrac{g^2}{R^2\Omega^4}}$

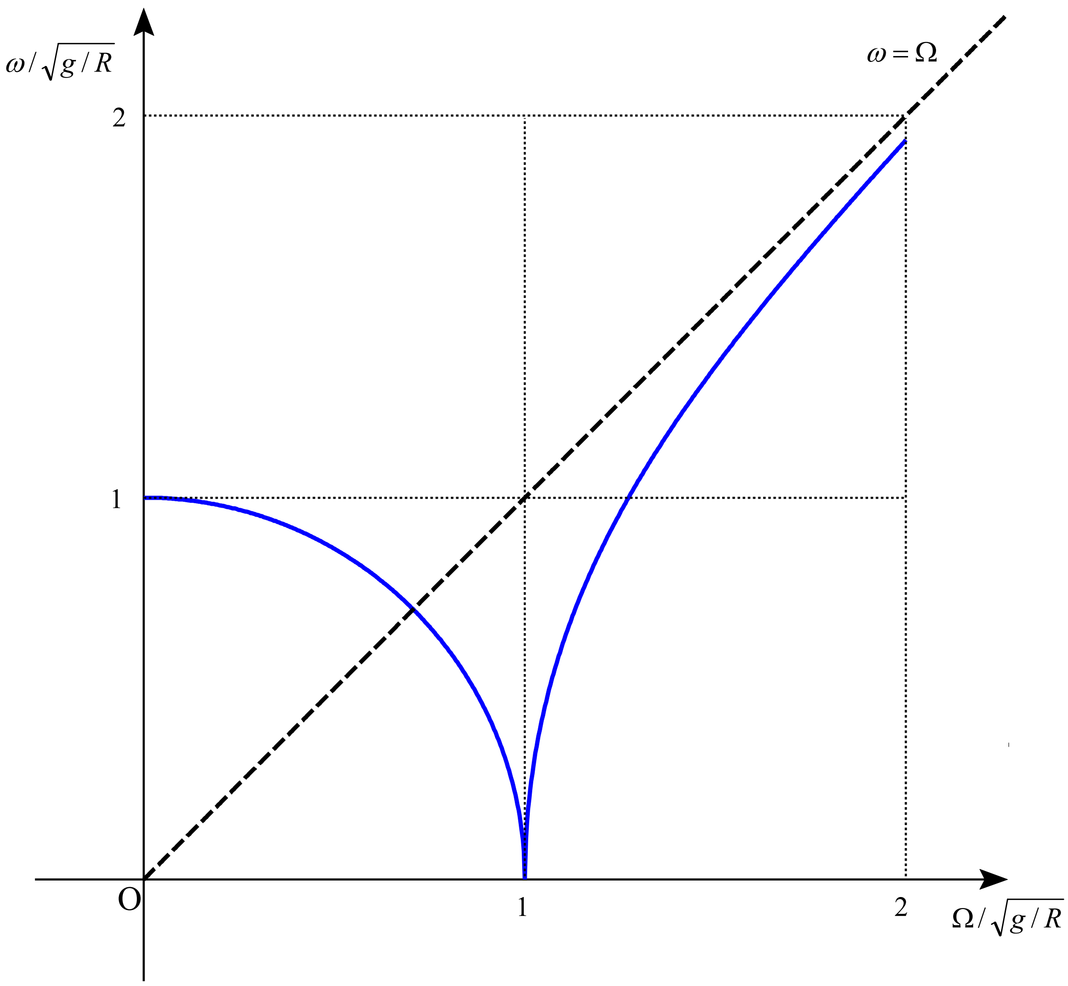
解説

$$F=-mR\Omega^2\sin^2\theta_0\times\phi$$
$$=-mR\Omega^2\left(1-\cos^2\theta_0\right)\times\frac{x}{R}$$
$$=-m\Omega^2\left(1-\frac{g^2}{R^2\Omega^4}\right)x$$

より， $k=m\Omega^2\left(1-\dfrac{g^2}{R^2\Omega^4}\right)$

よって， $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\Omega\sqrt{1-\dfrac{g^2}{R^2\Omega^4}}$

問 1



解説

横軸：$\dfrac{\Omega}{\sqrt{\dfrac{g}{R}}}=\dfrac{\Omega}{\Omega_c}$，縦軸：$\dfrac{\omega}{\sqrt{\dfrac{g}{R}}}=\dfrac{\omega}{\Omega_c}$

$\Omega<\Omega_c$ すなわち $\dfrac{\Omega}{\Omega_c}<1$ のとき

$$\frac{\omega}{\Omega_c}=\frac{1}{\Omega_c}\sqrt{\frac{g}{R}-\Omega^2}$$
$$=\frac{1}{\Omega_c}\sqrt{{\Omega_c}^2-\Omega^2}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^2}$$

ここで，わかりやすさの目的で $\dfrac{\Omega}{\Omega_c}=x,\ \dfrac{\omega}{\Omega_c}=y$ とおくと，$y=\sqrt{1-x^2}\ (0\le x<1)$

これは $x^2+y^2=1$ の $0\le x<1,\ y\ge 0$ の部分を表す。

$\Omega>\Omega_c$ すなわち $\dfrac{\Omega}{\Omega_c}>1$ のとき

$$\frac{\omega}{\Omega_c}=\frac{\Omega}{\Omega_c}\sqrt{1-\frac{g^2}{R^2}\cdot\frac{1}{\Omega^4}}=\frac{\Omega}{\Omega_c}\sqrt{1-\frac{1}{\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right)^4}}$$

ここで，わかりやすさの目的で $\dfrac{\Omega}{\Omega_c}=x,\ \dfrac{\omega}{\Omega_c}=y$ とおくと，

$y=x\sqrt{1-\dfrac{1}{x^4}}\ (1<x\le 2)$（漸近線は $y=x$）

$\boxed{く}$

$$\sqrt{\frac{g}{2R}}$$

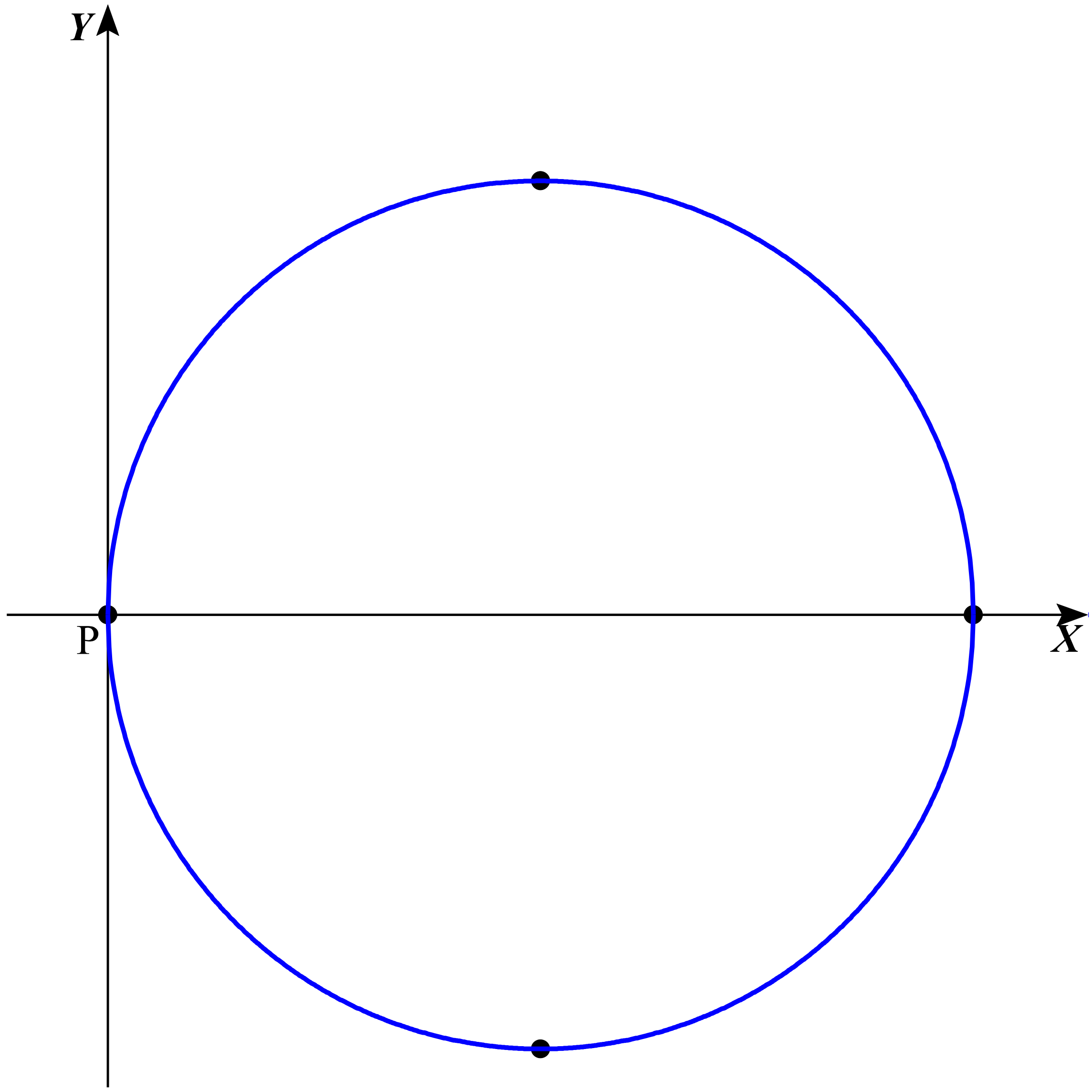
解説

問 1 のグラフより，$\Omega<\Omega_c$ のとき，すなわち $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{R}-\Omega^2}$ のとき $\omega=\Omega$ となる場合がある。

よって，$\Omega=\sqrt{\dfrac{g}{R}-\Omega^2}$ より，$\Omega=\sqrt{\dfrac{g}{2R}}$

問 2

(a)



(b) 円

解説

$\phi = a\cos\omega t$， $\omega = \Omega$ より，

$$
\begin{aligned}
X &= R\phi\cos\Omega t \\
&= Ra\cos\omega t\cos\Omega t \\
&= aR\cos^2\Omega t \\
&= \frac{aR}{2}(1+\cos 2\Omega t)
\end{aligned}
$$

$$\therefore X - \frac{aR}{2} = \frac{aR}{2}\cos 2\Omega t \quad ・・・①$$

$$
\begin{aligned}
Y &= R\phi \sin \Omega t \\
&= Ra \cos \omega t \sin \Omega t \\
&= aR \sin \Omega t \cos \Omega t \\
&= \frac{aR}{2} \sin 2\Omega t \quad ・・・②
\end{aligned}
$$

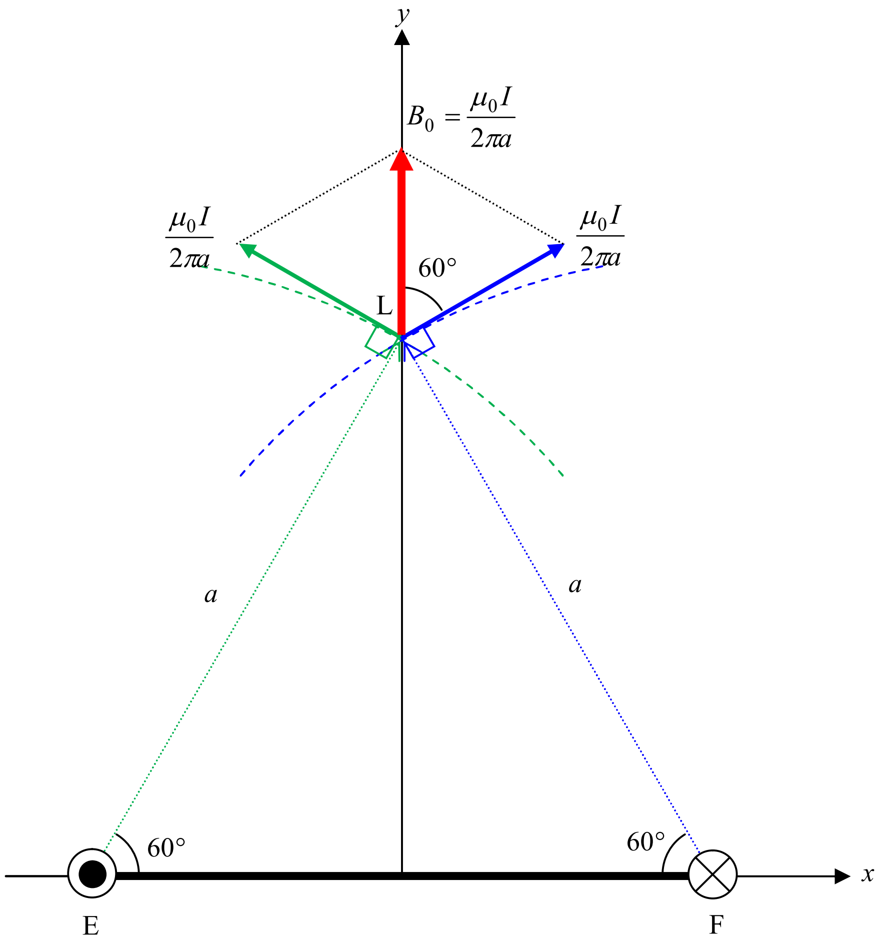
①，②より，$\left(X - \dfrac{aR}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\dfrac{aR}{2}\right)^2$

物理問題　Ⅱ

問 1

$\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

解説



問 2

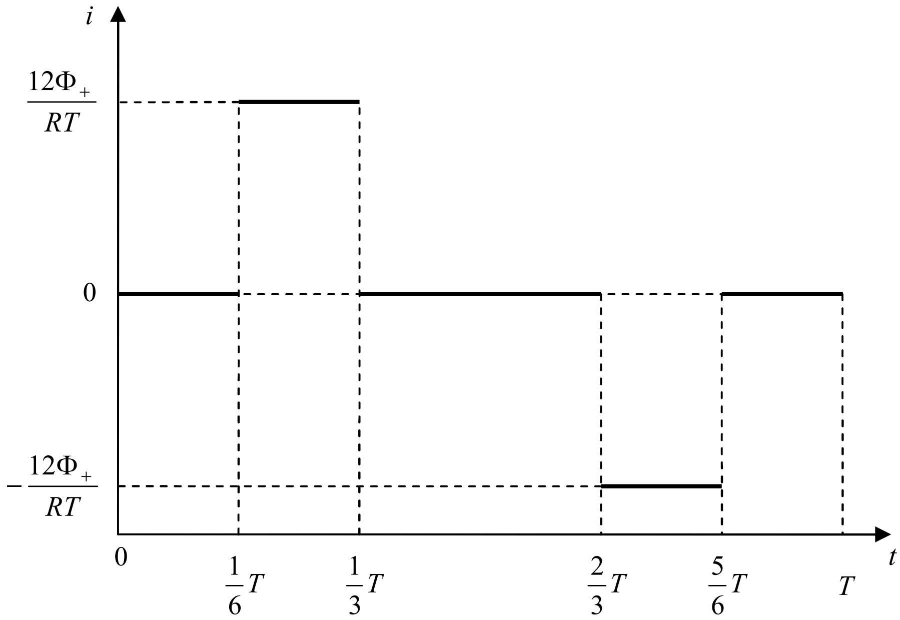
(a) $\pi b^2 B_1$　**(b)** $-\pi b^2 B_1$

解説

$$\Phi_+ = \pi b^2 B_1$$

$$\Phi_- = \pi b^2 \cdot (-B_1) = -\pi b^2 B_1$$

問 3



解説

環状ループに生じる誘導電流の向きは，レンツの法則により，$\frac{\Delta B_y(\theta)}{\Delta t}<0$ ならば正，$\frac{\Delta B_y(\theta)}{\Delta t}>0$ ならば負，また $\frac{\Delta B_y(\theta)}{\Delta t}=0$ ならば 0 である。

よって，$V=-\frac{\pi b^2 \Delta B_y(\theta)}{\Delta t}$

これより，$i=\frac{V}{R}=-\frac{\pi b^2}{R}\cdot\frac{\Delta B_y(\theta)}{\Delta t}$

ここで，$\Phi_+=\pi b^2 B_1$ より，$\pi b^2=\frac{\Phi_+}{B_1}$

よって，$i=-\frac{\Phi_+}{B_1 R}\cdot\frac{\Delta B_y(\theta)}{\Delta t}$

$0\le\theta\le\frac{1}{3}\pi$ すなわち $0\le t\le\frac{1}{6}T$ $\left(\because t=\frac{\theta}{2\pi}T\right)$ のとき

$i=0$

$\frac{1}{3}\pi\le\theta\le\frac{2}{3}\pi$ すなわち $\frac{1}{6}T\le t\le\frac{1}{3}T$ のとき

$$i=-\frac{\Phi_+}{B_1 R}\cdot\frac{-B_1-B_1}{\frac{1}{3}T-\frac{1}{6}T}=\frac{12\Phi_+}{RT}$$

$\frac{2}{3}\pi \le \theta \le \frac{4}{3}\pi$ すなわち $\frac{1}{3}T \le t \le \frac{2}{3}T$ のとき

$$i = 0$$

$\frac{4}{3}\pi \le \theta \le \frac{5}{3}\pi$ すなわち $\frac{2}{3}T \le t \le \frac{5}{6}T$ のとき

$$i = -\frac{\Phi_+}{B_1 R} \cdot \frac{B_1 - (-B_1)}{\frac{5}{6}T - \frac{2}{3}T} = -\frac{12\Phi_+}{RT}$$

$\frac{5}{3}\pi \le \theta \le 2\pi$ すなわち $\frac{5}{6}T \le t \le T$ のとき

$$i = 0$$

問 4

$$\frac{12\omega\Phi_+{}^2}{\pi R}$$

解説

ΔW は $\frac{12\Phi_+}{RT}[\mathrm{A}]$ の電流が $R\ [\Omega]$ の抵抗を $\frac{1}{3}T - \frac{1}{6}T = \frac{1}{6}T[\mathrm{s}]$ 流れたときの発熱量だから,

$$\begin{aligned}\Delta W &= \left(\frac{12\Phi_+}{RT}\right)^2 R \cdot \frac{T}{6} \\ &= \frac{24\Phi_+{}^2}{RT} \\ &= \frac{24\Phi_+{}^2}{R \cdot \frac{2\pi}{\omega}} \\ &= \frac{12\omega\Phi_+{}^2}{\pi R}\end{aligned}$$

問 5

$$\frac{1}{2}Ml^2\omega^2$$

解説

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}M(l\omega)^2 \\ &= \frac{1}{2}Ml^2\omega^2\end{aligned}$$

問 6

$Ml^2\omega\Delta\omega$

解説

$$\begin{aligned}
\Delta K &= \frac{1}{2}Ml^2\omega^2 - \frac{1}{2}Ml^2(\omega - \Delta\omega)^2 \\
&= \frac{1}{2}Ml^2\left\{\omega^2 - (\omega - \Delta\omega)^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}Ml^2\{\omega - (\omega - \Delta\omega)\}\{\omega + (\omega + \Delta\omega)\} \\
&= \frac{1}{2}Ml^2\Delta\omega(2\omega + \Delta\omega) \\
&= \frac{1}{2}Ml^2\Delta\omega \cdot 2\omega\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta\omega}{\omega}\right) \\
&\approx Ml^2\omega\Delta\omega
\end{aligned}$$

問 7

$\dfrac{12\Phi_+{}^2}{\pi MRl^2}$

解説

$\Delta K = \Delta W$ より， $Ml^2\omega\Delta\omega = \dfrac{12\omega\Phi_+{}^2}{\pi R}$ $\quad \therefore \Delta\omega = \dfrac{12\Phi_+{}^2}{\pi MRl^2}$

問 8

$1\times 10^{-4}\ [\mathrm{rad/s}]$

解説

$$\Delta\omega = \frac{12\Phi_+{}^2}{\pi MRl^2}, \quad \Phi_+ = \pi b^2 B_1 = \pi b^2\cdot\frac{8}{7}B_0 = \frac{8\pi b^2}{7}\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{4\mu_0 b^2 I}{7a}$$

より，

$$\begin{aligned}
\Delta\omega &= \frac{12}{\pi MRl^2}\left(\frac{4\mu_0 b^2 I}{7a}\right)^2 \\
&= \frac{192\mu_0{}^2 b^4 I^2}{49\pi MRl^2 a^2} \\
&= \frac{192\times(4\pi\times10^{-7})^2\times(3\times10^{-2})^4\times(1000)^2}{49\pi\times10\times1\times10^{-6}\times(2\times10^{-1})^2\times(2\times10^{-1})^2} \\
&= \frac{192\times16\pi\times81}{49\times4\times4}\times10^{-7} \\
&\approx \frac{192\times3.1\times81}{49}\times10^{-7} \\
&\approx 983\times10^{-7} \\
&\approx 1\times10^{-4}\ [\mathrm{rad/s}]
\end{aligned}$$

物理問題　Ⅲ

(1)

ア

$$\frac{h}{p}$$

イ

$$\frac{2\pi r}{\lambda_{\mathrm{e}}}$$

解説

定常波条件は$2\pi r = n\lambda_{\mathrm{e}}$（$n$ は自然数）だから，$n = \dfrac{2\pi r}{\lambda_{\mathrm{e}}}$

ウ

$$Rch\left(\frac{1}{{n_{\mathrm{L}}}^2} - \frac{1}{{n_{\mathrm{H}}}^2}\right)$$

解説

$n = n_{\mathrm{H}}$，$n = n_{\mathrm{L}}$ のエネルギー準位をそれぞれ E_{H}，E_{L} とすると，$E_{\mathrm{H}} = -\dfrac{Rch}{{n_{\mathrm{H}}}^2}$，$E_{\mathrm{L}} = -\dfrac{Rch}{{n_{\mathrm{L}}}^2}$

$E_{\mathrm{H}} > E_{\mathrm{L}}$ より，$|\Delta E| = E_{\mathrm{H}} - E_{\mathrm{L}} = Rch\left(\dfrac{1}{{n_{\mathrm{L}}}^2} - \dfrac{1}{{n_{\mathrm{H}}}^2}\right)$

エ

$$\frac{1}{R\left(\dfrac{1}{{n_{\mathrm{L}}}^2} - \dfrac{1}{{n_{\mathrm{H}}}^2}\right)}$$

解説

$|\Delta E| = Rch\left(\dfrac{1}{{n_{\mathrm{L}}}^2} - \dfrac{1}{{n_{\mathrm{H}}}^2}\right)$，$|\Delta E| = h\dfrac{c}{\lambda}$ より，

$$Rch\left(\frac{1}{{n_{\mathrm{L}}}^2} - \frac{1}{{n_{\mathrm{H}}}^2}\right) = h\frac{c}{\lambda} \qquad \therefore \lambda = \frac{1}{R\left(\dfrac{1}{{n_{\mathrm{L}}}^2} - \dfrac{1}{{n_{\mathrm{H}}}^2}\right)}$$

$\boxed{\text{オ}}$

6.5×10^{-7}

解説

$$\lambda=\frac{1}{1.1\times10^{7}\left[\mathrm{m}^{-1}\right]\cdot\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)}\approx6.54\times10^{-7}\left[\mathrm{m}\right]$$

$\boxed{\text{カ}}$

8.2×10^{-7}

解説

$|\Delta E|=h\dfrac{c}{\lambda}$ より，$\lambda=\dfrac{hc}{|\Delta E|}$

よって，λ は $|\Delta E|$ に反比例する。すなわちエネルギー準位が大きいほど λ は小さい。

ゆえに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1.1\times10^{7}\left[\mathrm{m}^{-1}\right]\cdot\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{9}{1.1}\times10^{-7}\approx8.18\times10^{-7}\left[\mathrm{m}\right]$

(2)

$\boxed{\text{キ}}$

$d\sin\theta$

$\boxed{\text{ク}}$

$\dfrac{d\Delta z}{L}$

解説

$$\begin{aligned}\lambda&=(k+1)\lambda-k\lambda\\&=\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta\\&\approx\tan(\theta+\Delta\theta)-\tan\theta\\&=d\cdot\frac{z+\Delta z}{L}-d\cdot\frac{z}{L}\\&=\frac{d\Delta z}{L}\end{aligned}$$

ケ

2

解説

オより，$(n_H, n_L)=(3, 2)$は条件を満たす。

また，カの解説の考え方により，

$n_L=1$のときの最大値は$\dfrac{1}{1.1\times10^{7}[\mathrm{m}^{-1}]\cdot\left(\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}\right)}\approx1.2\times10^{-7}[\mathrm{m}]<4.5\times10^{-7}[\mathrm{m}]$より不適

これと$n_L=3$のときの最小値はカより，$8.2\times10^{-7}[\mathrm{m}]>7.0\times10^{-7}[\mathrm{m}]$だから不適

よって，$n_L=2$で$(n_H, n_L)=(3, 2)$以外の組み合わせについて調べる。

$(n_H, n_L)=(4, 2)$のとき

$$\frac{1}{1.1\times10^{7}[\mathrm{m}^{-1}]\cdot\left(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{4^2}\right)}\approx4.8\times10^{-7}[\mathrm{m}]$$より，条件を満たす。

$(n_H, n_L)=(5, 2)$のとき

$$\frac{1}{1.1\times10^{7}[\mathrm{m}^{-1}]\cdot\left(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{5^2}\right)}\approx4.3\times10^{-7}[\mathrm{m}]$$より，不適

よって，条件を満たす組み合わせは$(n_H, n_L)=(3, 2), (4, 2)$の 2 通りある。

コ

（あ）

解説

$(n_H, n_L)=(3, 2), (4, 2)$の回折光の波長を$\lambda_1, \lambda_2$，明線の位置を$z_{1k}, z_{2k}$とすると，

$\dfrac{dz_{1k}}{L}=k\lambda_1, \dfrac{dz_{2k}}{L}=k\lambda_2$より，$z_{1k}=k\cdot\dfrac{L\lambda_1}{d}, z_{2k}=k\cdot\dfrac{L\lambda_2}{d}$

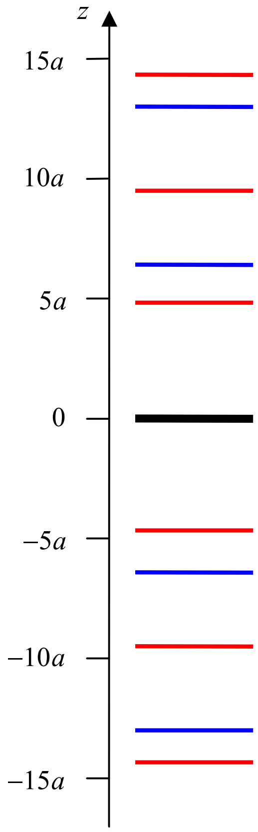
これと$\lambda_1=6.5\times10^{-7}[\mathrm{m}], \lambda_2=4.8\times10^{-7}[\mathrm{m}]$より，$z_{1k}=6.5k\cdot\dfrac{L}{d}\times10^{-7}, z_{2k}=4.8k\cdot\dfrac{L}{d}\times10^{-7}$

ここで，$\dfrac{L}{d}\times10^{-7}=a$とおくと，$z_{1k}=6.5ak, z_{2k}=4.8ak$

よって，kと明線の位置関係は下表のようになる。

k	0	1	2	3
z_{1k}	0	$6.5a$	$13a$	$19.5a$
z_{2k}	0	$4.8a$	$9.6a$	$14.4a$

青色：z_{1k}　赤色：z_{2k}



(3)

サ

$$\frac{c-v_x}{c}\cdot\lambda_0$$

解説

観測される波長を λ とすると，測定装置が観測するのは x 方向のドップラー効果だから，

$$\frac{c}{\lambda}=\frac{c}{c-v_x}\cdot\frac{c}{\lambda_0}\qquad\therefore\lambda=\frac{c-v_x}{c}\cdot\lambda_0$$

シ

$$\frac{k_{\mathrm{B}}T}{m}$$

解説

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T\ ,\quad \overline{v^2}=\overline{v_x{}^2}+\overline{v_y{}^2}+\overline{v_z{}^2}\ ,\quad \overline{v_x{}^2}=\overline{v_y{}^2}=\overline{v_z{}^2}\ \text{より，}\ \frac{1}{2}m\cdot 3\overline{v_x{}^2}=\frac{3}{2}k_BT$$

よって，$\overline{v_x{}^2}=\dfrac{k_{\mathrm{B}}T}{m}$

補足：公式を忘れたときの導き方

容器を 1 辺の長さ L の立方体とすると，$2m\sqrt{\overline{{v_x}^2}} = \bar{f}\Delta t$

単位時間あたりの衝突回数は $\dfrac{\sqrt{\overline{{v_x}^2}}}{2L}$ だから，$2m\sqrt{\overline{{v_x}^2}} \cdot \dfrac{\sqrt{\overline{{v_x}^2}}}{2L} = \bar{f}$

$$
\begin{aligned}
\therefore m\overline{{v_x}^2} &= \bar{f}L \\
&= \frac{\bar{f}}{L^2} \cdot L^3 \\
&= \bar{p} \cdot V \\
&= \frac{1}{N_0} RT \\
&= \frac{R}{N_0} T \\
&= k_{\mathrm{B}} T
\end{aligned}
$$

$$\therefore \overline{{v_x}^2} = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{m}$$

$\boxed{\text{ス}}$

①

解説

$\sqrt{\overline{{v_x}^2}} = \sqrt{\dfrac{k_{\mathrm{B}}T}{m}}$ より，$\bar{\lambda} = \dfrac{c - \sqrt{\dfrac{k_{\mathrm{B}}T}{m}}}{c} \cdot \lambda_0$

よって，温度が高いほど $\left|\bar{\lambda} - \lambda_0\right|$ が大きい。すなわちドップラー効果の影響は大きい。

$\boxed{\text{セ}}$

$\dfrac{k_{\mathrm{B}}T}{mc^2}{\lambda_0}^2$

解説

$$
\begin{aligned}
\overline{\Delta\lambda^2} &= \left(\bar{\lambda} - \lambda_0\right)^2 \\
&= \left(\frac{c - \sqrt{\dfrac{k_{\mathrm{B}}T}{m}}}{c} \lambda_0 - \lambda_0 \right)^2 \\
&= \frac{k_{\mathrm{B}}T}{mc^2}{\lambda_0}^2
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{ソ}}$

（う）

解説

$\overline{\Delta\lambda^2} = \dfrac{k_{\mathrm{B}}T}{mc^2}\lambda_0{}^2$ は観測される波長の λ_0 からの広がりは温度が高いほど大きいことを示している。よって，消去法で選択肢は（う）。

また，発光頻度は変わらないから，光の強さの総和は変化しない。

したがって，グラフの面積は変化しない。よって，（う）のグラフは正しい。